

## 三維尾流及旋翼葉片拍撲-延遲-扭轉耦合模式之建立及應用 - II

## Development And Application of a Three-Dimensional Wake And Blade Flap-Lag-Torsional Coupled Model - II

計畫編號: NSC 88-2212-E-032-006

執行期限: 87.8.1.-88.7.31.

主持人: 王怡仁 淡江大學航太工程學系

**摘要** 本論文利用解析的方法將尾流運動方程、葉片空氣動力學及一個非線性的複材葉片的 flap-lag-torsion 結構運動方程整合成一耦合的系統。本文將利用 Galerkin 法及 Duncan 多項式將其展開, 求得平衡項 (equilibrium term) 係數, 再與擾動項 (disturbant term) 合併且線性化之後, 利用 Floquet 理論求解該系統之 flap-lag-torsion 阻尼值。由結果得知, 本文之 lead-lag 阻尼值的預估整體誤差較前人之數值分析結果為小。此外, 本文模式所預估的 lag 阻尼也較前人保守安全。

**關鍵詞:** 直昇機, 旋翼葉片, 尾流動力學, 拍撲-延遲-扭轉, 阻尼。

## 1. 緒論

從 1982 年起從事直機之研究人員即對 flap-lag-torsion damping 之無絞接 (hingeless) 旋翼葉片有濃厚興趣, 因為那時的所有理論或計算值與實驗值 [1] 比較皆有高達 100% 的誤差。而在 de Andrade 及 Peters 的論文中 [2,3] 已將其減至 20% 以下, 這其中之主要原因仍與三維尾流場模擬之準確度有關。然而該文中的 20% 誤差, 據推測與選用之結構動力方程的硬度項 (stiffness term) 有關 [3], 此外, 該尾流理論仍未與任何複合材料之結構葉片相耦合過, 因此這方面將是一個值得探討的重點。

基於上述兩點瓶頸 (stiffness effect 及複合材料葉片), 與 Hodges [4,5] 同時進行 nonlinear beam 之研究的 Pai 及 Nayfeh [6,7] 在各自的研究方法上皆有所改進; 不過, Pai 的結果似乎略勝一籌。根據兩方文獻的比較, Hodges 等人是假設一個常數的材料硬度矩陣 (constant material stiffness matrices) 於其推導過程中以建立應力與應變間的關係。而此法是不適用於複合材料葉片上的。基本上複合材料葉片的剛性矩陣應該隨著葉片之變形而改變之。此外, Hodges 等人使用 global 的觀點於應力及應變之度量的基準, 此法有別於 Pai 等人是使用局部應力、應變 (local stress and strain measures) 做為建立其非線性葉片運動方程的着眼點。因此 Hodges 的葉片運動方程似乎無法準確描述結構彎曲 (warpings) 時的效應。

本文將使用 Pai 等人所發展的非線性複材葉片之原始理論為依據, 利用 unsteady airfoil theory 及 quasi-steady strip theory 推導每個葉片在弦向 (chord-wise)、拍撲向 (flapping) 及扭向 (twisting) 的空氣動力函數, 然後將此方程式與 Peters 動力尾流方程式耦合; 藉以形成一個非線性的旋翼葉片氣體彈性運動方程式。以期窺知與前人之差異。

## 2. 複材葉片結構動力方程的推導

Pai 之三維非線性複材葉片的運動方程可適

用於 extensional-flexure-flexure-torsional 任何方向振動的轉動或旋轉之複材結構葉片, 詳參考文獻 [6]。該方程式是使用牛頓法推導而出, 而基於細長葉片之彎曲及變形的程度, 相較於 Hodges 之固定 x-y-z 座標, 其結果是一組極為複雜之高非線性方程組, 其中包含 4 個未知量 (3 個位移, 1 個旋轉 (extensional-flexure-flexure-torsional))。此外一般直昇機旋翼葉片由於不考慮徑向 (radial) 的振動, 因此都假設是一個 inextensional 葉片; 如此則簡化為 3 個運動方程及三個未知量 (弦向 (chordwise), 撲拍向 (flapping) 及扭曲方向 (torsion))。而由於 Peters 及 Hodges 的座標設定與 Pai 之座標相差 90 度的旋轉角, 因此我們仍得將無因次化之三個非線性偏微方程式轉換到與 Peters (或 Hodges) 相同之座標, 以利於和尾流方程相耦合。無因次化後的複材結構方程經轉換後可得  $v$ 、 $w$ 、 $\gamma$  的運動方程式如下:

$$\begin{aligned} & \bullet v'' + \beta_{11} v'' - j_3 v'' + \left\{ \mu_5 v' - \beta_{12} \left[ -v' (w' w'' + v' v'') \right] + \beta_{13} (v' w'') \right\} \\ & + \left\{ \beta_{12} - 1 \right\} \left[ \gamma w'' - \gamma^2 v'' \right] - w'' \int_0^x w' v' dx - \frac{1}{2} \left[ -v' \int_0^x (w'^2 + v'^2) dx \right] \\ & + \beta_{12} \left\{ -\gamma v'' - w' v'' + w'' - \gamma^2 + \gamma'' \int_0^x w' v' dx \right\} + \left\{ -v' - \int_0^x (w'^2 + v'^2) dx \right\} \\ & + \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x (w'^2 + v'^2) dx - v' \int_0^x \left[ -2v' - x + \frac{1}{2} \int_0^x (w'^2 + v'^2) dx \right] dx \right\} = -L_v \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \bullet w'' + w'' + \beta_{11} w'' - j_3 w'' - \left\{ \mu_1 w' - \left\{ w' (w' w'' + v' v'') \right\} \right. \\ & + \beta_{11} (v' v'') + \left. \left\{ \beta_{12} - 1 \right\} \left[ -\gamma w'' - \gamma^2 w'' \right] - v'' \int_0^x w' v' dx \right\} \\ & - \frac{1}{2} \left\{ w' \int_0^x \left[ \int_0^x (w'^2 + v'^2) dx \right] dx \right\} \\ & + \beta_{12} \left\{ w'' v'' - \frac{1}{2} w'^2 \gamma'' - v'' \gamma^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 \gamma'' + \gamma \gamma'' \right\} \\ & - \left\{ j_3 - j_1 \right\} (\gamma' + w') - j_2 (\gamma') - \frac{1}{2} w' \int_0^x (w'^2 + v'^2) dx \\ & + w' \int_0^x \left[ -2v' - x + \frac{1}{2} \int_0^x (w'^2 + v'^2) dx \right] dx \right\} = -L_w \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \cdot j_1 \gamma'' - \beta_{11} \gamma'' - \beta_{13} w'' - \left\{ \mu_5 \gamma' + (1 - \beta_{22}) \left[ w'^2 - v'^2 \right] \gamma + w' v'' \right\} \\ & - j_1 \left( \int_0^x w' v' dx \right)'' + j_1 \left( w' v' \right)' + (j_2 - j_3) \left\{ w'^2 - v'^2 \right\} \gamma + v' w'' \\ & + \beta_{13} \left\{ -v'' \gamma + v'' \int_0^x w' v' dx - \frac{1}{2} w'' \gamma^2 + \frac{1}{2} w'' w'^2 + w'^2 w' + w' v'' \right\} \\ & - \left\{ -j_1 w'' + (j_2 - j_3) \left[ w'' - 2w' \gamma^2 - 2v' \gamma + 2v'' \int_0^x w' v' dx \right] \right. \\ & \left. + \left( -\gamma + \int_0^x w' v' dx + w'^2 + \frac{1}{2} \gamma^2 \right) \right\} = L_r \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $v$  乃是 lead-lag 之位移,  $w$  為 flapping 之位移,  $r$  為 torsion 之旋轉, 而  $\beta_{11} = D_{11} / D_{33}$ ,  $\beta_{22} = D_{22} / D_{33}$ ,  $\beta_{13} = D_{13} / D_{33}$ 。就一平板葉片而言,  $j_1 = j_2 + j_3 = \frac{h^2}{12R^2} + \frac{b^2}{12R^2}$ ,  $\bar{x} = x = \frac{r}{R}$ ,  $R$  為葉片長度。而  $D_{11}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{33}$  及  $D_{12}$  則分別代表 torsion,  $v$  方向之 bending 的硬度 (stiffness) 及  $w$  方向之 bending 的硬度以及 bending-twisting 互相耦合的硬度值。

### 3、葉片上空氣動力表示式之推導

就一個完整的氣體彈性力學系統而言, 應該包含了結構動力、尾流動力與空氣動力之間耦合的系統, 對於本模式而言由於是一振動的葉片, 而且本文的目的在於求得  $v$ 、 $w$ 、 $\gamma$  在葉片上的位移, 因此相對之運動應以葉片為參考座標, 詳圖一, 現將空氣動力的理論表示如下, 由圖一得知,  $U$  是翼剖面相對於流場之速度, 而在  $v$  及  $w$  方向及第  $q$  片葉片之升力可表成如下:

$$\begin{aligned} \begin{cases} L_v = L_C \sin \phi - D \cos \phi \\ L_w = L_C \cos \phi + L_{NC} \cos \theta + D \sin \phi \\ L_q = L_{w(circulatory)} = L_C \cos \phi + D \sin \phi \end{cases} \quad \text{及} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} L_C = \frac{1}{2} \rho a c \left( -U^2 + U \frac{c}{2} \dot{\epsilon} \right) \alpha \\ L_{NC} = \frac{1}{8} \rho a c^2 \left( -\dot{U}_p + \frac{c}{2} \frac{\dot{\epsilon}}{2} \right) \alpha \\ D = \frac{1}{2} \rho c U^2 C_d \end{cases} \quad (4)$$

其中,  $L_C$  為環流升力,  $L_{NC}$  為非環流升力, 我們將  $U$  分為  $U_p$  與  $U_T$  兩分量, 則  $U = \sqrt{U_p^2 + U_T^2}$ ,  $\phi = \tan^{-1} U_p / U_T$ ,  $\alpha = \theta - \phi$ , 而  $U_p = -v_i + \dot{w}$ ,  $U_T = \dot{x} + \dot{v}$ ; 此外,  $\dot{\epsilon}$  為翼剖面 (airfoil) 在俯仰方向的角速度, 假若吾人所考慮的旋翼葉片無預錐角 (precone angle = 0), 無後掠角 (swept angle = 0), 無下垂角 (droop angle = 0), 而且不考慮俯仰聯結機構的效應 (no pitch-link effect), 則無因次化後可將升力展開成為

$$\begin{aligned} L_v &= \left[ \frac{1}{2} \rho a c \left( U^2 (\theta - \phi) \sin \phi + U \frac{c}{2} \dot{\gamma} (\theta - \phi) \sin \phi + U \frac{c}{2} w' \cos \theta_0 (\theta - \phi) \sin \phi \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \rho a c^2 C_d \cos \phi \right] \\ L_w &= \left[ \frac{1}{2} \rho a c \left( U^2 (\theta - \phi) \cos \phi + U \frac{c}{2} \dot{\gamma} (\theta - \phi) \cos \phi + U \frac{c}{2} w' \cos \theta_0 (\theta - \phi) \cos \phi \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \rho a c^2 C_d \sin \phi \right] \\ &\quad + \frac{1}{8} \rho a c^2 \left( \dot{U}_p + \frac{c}{2} \dot{\gamma} + \frac{c}{2} w' \cos \theta_0 \right) \cos \phi \\ M_q &= -\frac{1}{12} \rho a c^3 \left( U_T \dot{\gamma} + \dot{U}_p + \frac{c}{2} \dot{\gamma} + U_T w' \cos \theta_0 + \frac{3}{2} \frac{c}{2} w' \cos \theta_0 \right) = L_r \\ L_q &= \left[ \frac{1}{2} \rho a c \left( U^2 (\theta - \phi) \cos \phi + U \frac{c}{2} \dot{\gamma} (\theta - \phi) \cos \phi + U \frac{c}{2} w' \cos \theta_0 (\theta - \phi) \cos \phi \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \rho a c^2 C_d \sin \phi \right] \end{aligned} \quad (5)$$

### 4、Peters 動力尾流理論

Peters 動力尾流理論主要之數學理論是以普朗特加速位勢函數 (Prandtl's acceleration potential function)  $\Phi$  為基礎推衍而來, 由此定義誘導流速度的表示式可以雷建德函數 (Legendre function) 和傅立葉級數 (Fourier series) 來表示:

$$v_i(\bar{x}, \psi, \bar{t}) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=r+1, r+3, \dots}^{\infty} \psi_j^r(\bar{x}) \left[ \alpha_j^r \cos(r\psi) + \beta_j^r \sin(r\psi) \right] \quad (6)$$

其中係數函數  $\alpha_j^r$  和  $\beta_j^r$  都是模式中狀態值 (state variable), 為時間的函數。利用時間領域的誘導流理論 (time domain induced-flow theory) 及拉普拉斯方程式 (Laplace's equation) 和式 (6) 的表示, 再將整個轉子面積分後得到適用於轉子滯空或前飛時的矩陣型式之一階常微分方程式:

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc} K_n^m & & \\ & \ddots & \\ & & A_n^m \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \alpha_n^m \\ \vdots \\ \beta_n^m \end{array} \right] + \nu \left[ \begin{array}{ccc} \vdots & & \\ \vdots & & \\ \vdots & & \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} \vdots & & \\ \vdots & & \\ \vdots & & \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \alpha_n^m \\ \vdots \\ \beta_n^m \end{array} \right] = \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

在式 (7) 中  $\alpha_j^r$  及  $\beta_j^r$  代表誘導流的狀態函數 (induced flow state variable) 的餘弦及正弦部份,  $[L]$  為誘導流影響係數矩陣 (induced flow influence coefficient matrix),  $[K]$  為質量矩陣 (apparent mass matrix);  $[A]$  及  $[B]$  為轉換矩陣, 提供了徑向誘導流之分佈的耦合性。而此尾流方程式 (式 (7)) 之外力函數 (右邊項) 為 cosine 部份:

$$\tau_n^{mc} = \frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^Q \int_0^1 L_q(\bar{r}, \bar{t}) \bar{P}_n^m \frac{1}{\nu} d\bar{r} \cos(m\psi_q) \quad (8)$$

sine 部份:

$$\tau_n^{ms} = \frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^Q \int_0^1 L_q(\bar{r}, \bar{t}) \bar{P}_n^m \frac{1}{\nu} d\bar{r} \sin(m\psi_q) \quad (9)$$

其中  $L_q$  代表第  $q$  片葉片的升力。

### 5、耦合模式的建立

由二 ~ 四已分別建立結構、空氣動力及尾流方程, 而於式 (1)、(2) 及 (3) 其右邊項之  $L_v$ ,  $L_w$  及

$L_y$  則分別由式 (4,5) 代入。至於式 (7) 右邊的壓力項 (式(8)、(9)) 內的  $L_q$  則由式 (5) 之  $L_q$  代入。準此可建立一個整合了結構動力、空氣動力及尾流動力之氣體彈性方程式。然而細觀這一組方程式的各項，其中包括了積分、偏微分及諸多非線性項，因此再進一步的展開或簡化乃是求解的必要步驟。

首先從結構的方程來看，要解此一方程式，必須採用半解析半數值方法，我們利用 Galerkin's method，將變數轉換為 equilibrium term 與 disturbant term 和 comparison function 的積：

$$v = \sum_{k=1}^5 (\bar{v}_k + \delta v_k) \Psi_k, \quad w = \sum_{k=1}^5 (\bar{w}_k + \delta w_k) \Psi_k, \quad \gamma = \sum_{k=1}^5 (\bar{\gamma}_k + \delta \gamma_k) \Theta_k \quad (10)$$

其中， $\Psi_k$ 、 $\Theta_k$  為 comparison function，我們採用 modified Duncan 的多項式，就一個 hingeless 的葉片而言 modified Duncan 多項式的偶數次方項正好可滿足本研究將探討的無絞接 (hingeless) 葉片的邊界條件之要求。將式 (10) 代入式 (1)~(3) 及式 (5) 中，對其中的  $v$ 、 $w$ 、 $\gamma$  做展開，如此則可到非線性耦合方程式。

## 6、特徵值分析

擾動部份 (disturbant part) 包含了， $\delta v$ 、 $\delta w$ 、 $\delta \gamma$  等擾動項，甚或兩兩相乘及更高之非線性項。為簡化問題之複雜性，我們將省略擾動部份的非線性的項次而僅保留  $\delta v$ 、 $\delta w$ 、 $\delta \gamma$  及  $\bar{v}_k$ 、 $\bar{w}_k$ 、 $\bar{\gamma}_k$  與其相乘的部份。因此擾動部份將變成一個線性方程式。由於原展開式極為複雜，在此不予贅述。因此首先利用數值法解出平衡態部份的非線性方程之  $\bar{v}_k$ 、 $\bar{w}_k$ 、 $\bar{\gamma}_k$  [8] 各個值，則擾動部份的特徵值分析將可成為一個單純的線性問題了。

由式 (1,2,3) 必須與尾流方程相耦合，而事實上尾流方程亦即式 (7) 其右邊之壓力函數  $\tau_n^m$  內之  $L_q$  也可直接由式 (5) 中代入。因此聯合式 (1,2,3) 及尾流方程，吾人可將此擾動態方程表成常微分方程的矩陣形式如下，

$$\begin{bmatrix} \delta v_i \\ \delta v_i \\ \delta w_i \\ \delta \gamma_i \\ \delta \gamma_i \\ \alpha_i' \\ \beta_i' \end{bmatrix} + [K_{ij}] \begin{bmatrix} \delta v_i \\ \delta v_i \\ \delta w_i \\ \delta \gamma_i \\ \delta \gamma_i \\ \alpha_i' \\ \beta_i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{F_v\} \\ \{F_w\} \\ \{F_\gamma\} \\ \frac{1}{2} \{F_n^{mc}\} \\ \frac{1}{2} \{F_n^{mc}\} \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中  $[K_{ij}]$  則為質量矩陣， $[L_{ij}]$  則為硬度矩陣 (stiffness matrix)， $\{F_v\}$ 、 $\{F_w\}$ 、 $\{F_\gamma\}$  則為結構方程的輸入外力項。在這一組聯立方程中，可令右邊之外力為零，並利用第二大部份的結構振動頻

率與其硬度 (stiffness) 之關係式，將可求解  $\delta v$ 、 $\delta w$ 、 $\delta \gamma$  在一特定旋轉頻率範圍下之特徵值，然而  $[L_{ij}]$  實則為時間函數 ( $\bar{t}$ ) 因此本研究將利用 Floquet Theory 所得之過渡矩陣 (transient matrix) 之複數型態特徵值求取系統之真正特徵值。首先吾人將利用 4 階 Runge-Kutta 法求得富羅格的轉換矩陣 (transformation matrix)，若我們假設富羅格的轉換矩陣的特徵值為  $\Lambda_i = a + ib$ ，則此線性系統的特徵值 ( $\eta_i$ ) 與富羅格轉換矩陣的特徵值 ( $\Lambda_i = a + ib$ ) 之關係為：

$$\eta_i = \frac{\ln \sqrt{a^2 + b^2}}{T} + i \left( \frac{1}{T} \tan^{-1} \frac{b}{a} + \frac{2\pi}{T} \right) \quad (12)$$

而本研究正是要求取在不同的俯仰角 (collective pitch angle  $\theta_o$ ) 之下，受到非穩態尾流及空氣動力效應影響之下的複材及均質葉片的 flap-lag-torsion 阻尼值 (亦即  $v$ 、 $w$ 、 $\gamma$  三個方向的 mode 的特徵值 ( $\eta_i$ ))。

## 7、結果與討論

由於 lead-lag damping 一直是目前的理論界無法準確預估的現象，而 [3] 也提及較佳的結構 stiffness term 的模擬將是考慮的重點。因此本文之結果列出 lead-lag damping 之 Differential mode 及 Collective mode 與實驗值相比較，圖二為 Differential mode，圖三為 Collective mode。此兩圖皆顯示出 de Andrade 等人的預估值及本模式預估值皆與實驗值 [1] 有相當的誤差，然而與前人的 50% 與 200% 的誤差相比 [2]，已經有大幅改善了。就圖二而言顯然的 de Andrade 的模式在低 pitch angle 之下有較好的預估值而在  $6^\circ$  以後就有極大誤差產生。而本文的模式則在較高的 pitch angle 有較佳的預估值。其誤差從  $\theta = 0^\circ$  的 1.8% 到  $\theta = 10^\circ$  的 6.3% ~ 31.7% 皆較前人及 de Andrade 的誤差範圍從  $\theta = 0^\circ$  的 14.2% 到  $\theta = 10^\circ$  的 83.9% ~ 152.6% 為小，且更難能可貴的是本模式預估趨勢及範圍較為保守，應該是較為安全的考量。其原因可能是對於 lead-lag 的 stiffness 的不同所致，導致其 damping 也隨著較趨近於 0。圖三則為 Collective mode 的 damping 對不同  $\theta$  的圖。其預估狀況與上一個例子類似，即低  $\theta$  時 de Andrade 的 structural model 優於本模式，而本模式再高  $\theta$  角時有較佳之預估值。此 mode de Andrade 的誤差從  $\theta = 0^\circ$  的 11.7% 到  $\theta = 10^\circ$  的 40.7% ~ 92.1% 之間，而本模式的誤差則從  $\theta = 0^\circ$  的 1.24% 到  $\theta = 10^\circ$  的 10.2% ~ 34.2% 之間。此外在以上的實例中，本文建立的模式與實驗值及 de Andrade 的結果有誤差的另一個原因可能是實驗值及 de Andrade 的結構模式有考慮 Pitch-link effect 及 soft pitch flexure 的效應，而吾人並未將其加入結構模擬中。此外就實驗值在高 pitch angle 時 lead-lag 的 damping 有下降的趨勢，而這也是吾人的預估值所無法預測的趨勢，

相信這是日後對於結構項的模擬需要多加考慮的項目。

## 8、結論

本文已成功的將 Pai 的非線性複材葉片結構方程式經由座標轉換而與 de Andrade 的 3-D 動態尾流方程式相耦合。本文只初步針對均質葉片做一探討，以瞭解 Pai 的結構模式的應用性及正確性。經由數值法求得其系統特徵值之後，與前人[2]及實驗值[1]相比較，吾人有下列幾點結論。

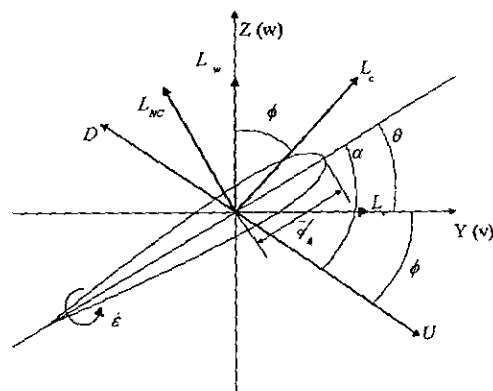
- 一. 本文之模式對於 lead-lag damping 之預估有較為保守之趨勢，就安全因素來考量而言，這是一個較佳的選擇。
- 二. 一般而言，本模式的誤差已從前人[2]的 83.9% ~ 152.6% 降為 6.3% ~ 31.7%，此項比較可證實本模式的準確性。

## 9、誌謝

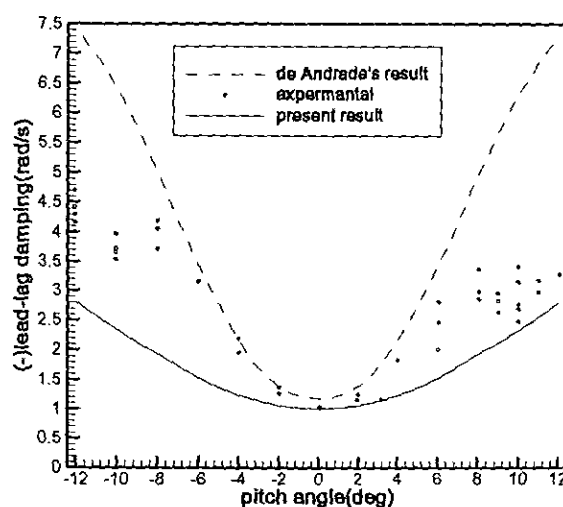
本文承蒙中華民國行政院國科會贊助，計畫編號為 NSC 88-2212-E-032-006，本文作者特此誌謝。

## 10、參考文獻

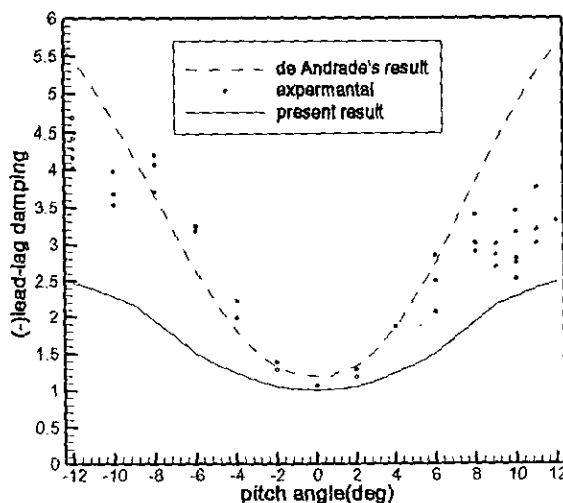
- [1] Sharpe, D. L., "An Experimental Investigation of the Flap-Lag-Torsion Aeroelastic Stability of a Small-Scale Hingeless Rotor in Hover," NASA TP-2546, January, 1986
- [2] Donizeti de Andrade, "Application of Finite-State Inflow to Flap-Lag-Torsion Damping in Hover," Ph. D. Thesis. School of Aerospace Engineering, Georgia Institute of Technology, May, 1992.
- [3] de Andrade, D., and Peters, D. A., "Correlation of Experimental Flap-Lag-Torsion Damping - A Case Study," *Mathematical and Computer Modeling - Rotorcraft Modeling, Part II*, Pergamon, pp. 135~158, 1994.
- [4] Hodges, D. H., Crespo da Silva, M. R. M., and Peters, D. A., "Nonlinear Effects in the Static and Dynamic Behavior of Beams and Rotor Blades," *Vertica*, Vol. 12, pp. 243-256, 1988.
- [5] Hodges, D. H., Atilgan, A. R., Cesnik, C. E. S., and Fulton, M. V., "On A Simplified Strain Energy Function for Geometrically Nonlinear Behavior of Anisotropic Beams," *Composite Engineering* Vol. 2, 513-526.
- [6] Pai, P. F., and Nayfeh, A. H., "Three-Dimensional Nonlinear Vibrations of Composite Beams - I. Equations of Motion," *Nonlinear Dynamics 1*, Kluwer Academic Publishers, pp. 477-502, 1990.
- [7] Pai, P. F., and Nayfeh, A. H., "Three-Dimensional Nonlinear Vibrations of Composite Beams - II. Flapwise Excitations," *Nonlinear Dynamics 2*, Kluwer Academic Publishers, pp. 1-34, 1991.
- [8] 王怡仁"三維尾流及旋翼葉片拍撲-延遲-扭轉耦合模式之建立及應用"國科會結案報告，民國87年8月。



圖一. 旋翼葉片運動的座標圖



圖二. Differential Mode Lag Damping



圖三. Collective Mode Lag Damping